

# 位相ダイナミクスに基づく固定および振動物体からの渦剥離の解析および制御

Analysis and control of vortex separation from fixed/oscillating object based on the phase dynamics

研究代表者 広島大学統合生命科学研究科 准教授 飯間信\*

Makoto Ima

We developed an efficient method to analyze the phase response to perturbations in Kármán's vortex street. This method gives the phase sensitivity function which plays an important role in the phase reduction theory, and is designed for the system including incompressible fluid motion, which has a large degree of freedom and non-local interactions. Also, this method uses time evolution algorithm alone, which implies that we can save the memory to store the data of Jacobian along the limit cycle. Further, the parallel computation can be easily implemented. We validated this method by the traveling pulse in the FitzHugh Nagumo equation in a periodic domain. A family of Kármán's vortex streets was analyzed. And the obtained result will be used for the future phase control. Finally, we discuss the problems and the possibility for the analysis of oscillating cylinder.

## 要旨

カルマン渦列における渦剥離の位相変化と与えた摂動の関係を位相縮約理論により解析する効率的な方法を開発し、渦の剥離挙動を明らかにした。この方法は位相縮約理論で中心的な役割を果たす位相感受関数を計算するもので、特に非圧縮流体系のような大自由度で大域的に場が決定される場合に適している。この方法では時間発展アルゴリズムのみを用いるため、従来方法のように大量のメモリを必要とせず並列化にも適した方法である。伝統的な手法に基づく先行研究の結果とこの手法を比較して同じ結果を与えることを確かめた後、この手法を円柱周りのカルマン渦に適用し、位相応答を調べた。円柱の回転やレイノルズ数に依存した応答の挙動は今後位相制御の際の基礎的知見として役立てられる。また振動円柱や、より一般的な物体の位相応答を計算するために適した埋め込み境界法をプログラムを作成して確認を行い、良好な成績を得た。しかし、本手法を更に大規模な系に適用する場合には、必要な計算時間の節約という観点からもう一段の工夫が必要である。

## 1. まえがき

自然界には機械的振動、神経細胞の発火、ホタルの点滅など、相空間中で安定なリミットサイクル (Limit Cycle; LC) をもつ多くの興味深い系がある<sup>(1)</sup>。位相縮約理論は LC 近傍の状態を位相  $\phi$  と呼ばれる単一の量で特徴づけ、状態のダイナミクスを

$\phi$  の常微分方程式により記述する方法論を与える

<sup>(1)</sup>。このため、元の系が大きな自由度を保つ場合には大幅な自由度の低減が実現できる。

流体系における LC の典型例はカルマン渦列である。カルマン渦列は一様流中に置かれた円柱等の物体後流に見られる周期的な流れで、レイノルズ数  $Re = U D / \nu$  ( $U$  は一様流の速さ、 $D$  は円柱の直径、 $\nu$  は動粘性率) がおよそ 47 以上の時観測される。このためカルマン渦列を位相に着目して解析する場合には位相縮約理論が有用であると期待される。位相縮約理論をカルマン渦に適用することで、渦剥離の特性の新たな側面を明らかにするだけでなく、剥離タイミング等の流れ制御を実現する新技術を開発する可能性が生まれる。

位相縮約理論で重要な量の一つは位相感受関数と言われる関数であり、摂動に対する位相変化の線形応答を表す量を表す。その主な計算手法は直接法と随伴法である。直接法では直接摂動を与え、その位相応答を計測するもので収束するまでの時間がかかり、効率がよくない。随伴法は、位相感受関数に収束する随伴方程式を計算することにより位相感受関数を求める方法で、随伴方程式が陽に求められる場合には効率よく位相感受関数を求めることができる<sup>(1)</sup>。

カルマン渦の位相応答については、直接法による限定的な領域での解析結果が報告されているが<sup>(2)</sup>、位相感受関数の完全な形を非圧縮性流体で求めた例については報告がなかった。その最大の理由は計算

\*助成決定時所属 広島大学大学院理学研究科

資源である。随伴法で位相感受関数を求める場合、LC に沿った任意の点の線形化行列（ヤコビアン）が必要である。非圧縮流体の場合その形を陽に求めることが難しいため、数値的にヤコビアンすべての要素を計算し保存する必要がある。この際大量のメモリが必要となるためこの手法は現実的ではない。またヤコビアンを必要な場合に逐一数値的に計算する場合、収束するまでの時間がかかるため計算時間がかかるという問題がある。

そこで本研究では、位相感受関数を計算するために新しい数値計算アルゴリズムを提案し、そのアルゴリズムで円柱周りの流れの位相感受関数を求めることを第一の目的とした<sup>[1]</sup>。また、本手法により得られた位相感受関数の特性を調べ、物体周りの流れにおける普遍的な特徴について知見を得ることを第二の目的とした<sup>[2]</sup>。これらの研究内容はすでに出版されている。最後に、より一般的な運動物体周りの流れの計算に向けた準備および進行状況について述べる。

## 2. 提案手法の説明

### 2.1 理論背景

本小節では最小限の理論背景と用語の定義を与える。より詳しくは参考文献<sup>(1)</sup>もしくは発表論文<sup>[1]</sup>を参照されたい。

$n$ 次元の自励力学系を

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

とする。ここでこの力学系は周期  $T$  の安定リミットサイクル(Limit cycle; LC)を持つものと仮定する。すなわちリミットサイクルを  $p(t)$  とすると、 $p(t+T)=p(t)$  という関係を満たす。位相縮約理論によると、LC 近傍で位相と呼ばれる関数  $\Phi(x)$  を定義することができる。位相感受関数  $Z(\phi)$  は、以下の式で定義される。

$$Z(\phi) = \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{\Phi(x)=\phi}$$

つまり、 $Z(\phi)$  は LC 近傍で座標がずれた場合に位相がどれくらいずれるのかを与える関数である。随伴

法では、 $Z(\phi)$  を以下の方程式の  $t \rightarrow -\infty$  での漸近状態として求める。

$$\frac{d\tilde{Z}}{dt} = -{}^t J(p(t))\tilde{Z}$$

ここで  $J$  は力学系のヤコビアンで、 $(i, j)$  成分は  $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$  で与えられる。また、 $\tilde{Z}$  は  $\tilde{Z}(t) = \left(\frac{1}{\omega}\right) Z(\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi/T$  は角周波数である。

この力学系のヤコビアンを数式で容易に与えられる場合は随伴方程式をすぐに積分できるが、非圧縮流体の場合、圧力項はポアソン方程式を数値的に計算することにより与えられるため、容易に与えることはできない。このため随伴法を適用する場合は一周期に渡るヤコビアンのデータを計算・保存しておく必要がある。自由度が  $n$ 、一周期を  $m$  等分したデータの場合は、実数のデータが  $n^2 m$  個必要となるため、 $n$  が大きい場合には極めて大量のデータを保存しておく必要があり、実用的ではない<sup>[1]</sup>。

### 2.2 提案手法

そこで、ここでは以下のような手法を提案する。元の力学系の周期解周りの線形化系を

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad A(t) = J[p(t)]$$

とおき、その基本解行列を  $G_p(t)$  とおく。すると、

$${}^t z_p(t)(G_p(t+T) - G_p(t)) = 0,$$

を満たす  $z_p(t)$  が  $\tilde{Z}(t)$  に比例することを示すことができる<sup>[1]</sup>。この方程式は Novichenko ら<sup>(2)</sup>が求めた方程式と同じであるが、導出方法が異なる。ここで基本解行列は、力学系の周期解近傍の軌道と

$$\begin{aligned} & x(t_0 + T; p(t_0) + y_0) - x(t_0; p(t_0) + y_0) \\ & \approx (G(t_0 + T) - G(t_0))y_0 \end{aligned}$$

という関係で結ばれているため、元の力学系の時間発展を計算するアルゴリズムだけを用いて計算ができる。実際の計算では、 $y_0$  を様々に変えた式を並列計算によりさせることで  $G_p(t+T) - G_p(t)$  の情報を得ることが可能である。得られた情報から、グラムシュミットの直交化法を応用して  $z_p(t)$  を求める<sup>[1]</sup>。

### 3. 計算例 I: 進行パルス解

本提案アルゴリズムの妥当性を検証するために、まず自由度がそれほど大きくない 1 次元の反応拡散方程式を用いて位相感受関数を計算し、先行研究<sup>(4)</sup>において随伴法で計算された値と比較した<sup>[1]</sup>。また並列化効率についても検証する。

反応拡散系は、物質の化学反応と空間での拡散の両方を考慮した時に現れる物質の様子を記述する偏微分方程式で、化学反応系だけでなく生態系などでも用いられる系である。反応拡散系で記述できる系の一つに神経細胞の活動電位があり、その方程式として Fitz-Hugh-南雲方程式が知られている。1 次元の場合の具体的な方程式は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(u - a)(1 - u) - v + d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k(u - b v) + d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

により与えられる。ここで  $u, v$  は独立変数、 $t$  は時間、 $x$  は空間変数である。 $a, b, k, d_1, d_2$  は定数である。この方程式は定常進行パルス解と呼ばれる、形を変えずに等速で運動する解を持つ。そのため周期境界条件の元での定常進行パルス解は周期解とみなせる。その周期解の位相感受関数を本提案アルゴリズムにより求めた。

計算条件は以下の通りである。領域の大きさは 300、でその領域を 600 個の離散的な点で表現している。パラメータは  $a=0, b=1, k=0.018, d_1=1, d_2=0.02$  とした。計算にあたっては拡散項を中心差分法で離散化している。周期解  $(u, v) = (u_p, v_p)$  は Newton-Raphson 法を用いて求め、周期  $T$  はおよそ  $T=553$  であった。その周期を 6000 分割している。このようにして得られた位相感受関数を  $u, v$  それぞれに対応するベクトルに分け、分割幅で正規化した量を  $(Q_u, Q_v)$  とした (これらの関数も本小節では便宜上位相感受関数と呼ぶ)。その意味は空間の各点で  $u$  あるいは  $v$  にデルタ関数的な摂動を加えたときの位相のずれがそれぞれ  $Q_u, Q_v$  となる。 $(u_p, v_p)$  (破線) および  $(Q_u, Q_v)$  (実線) を図 1 に示す。

これはある位相における位相感受関数であるが、この例ではパルスが形を変えずに等速で運動することから、位相感受関数の空間分布も同様に形を変えない。このためこの系の位相応答の情報はこの図に

すべて表されている。

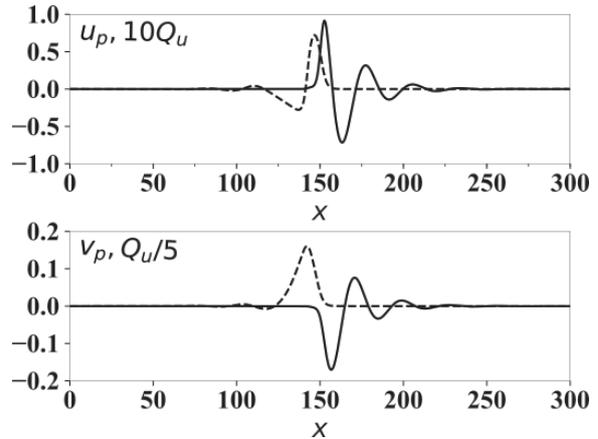


図 1 Fitz-Hugh-南雲方程式の定常進行パルス解(点線)と位相感受関数(実線)。

この系のパルス解は右に進んで行く。摂動に応じた位相のずれは摂動により生じた位置のずれと解釈される。図 1 が示すことは、1) 位相を変化させる摂動の影響が大きいのは、パルスの位置あるいは進行方向側(右側)の摂動によること、2) パルスからの距離が離れるほど影響は小さくなること、3) 位相のずれの符号は位置より異なること、また同じ位置でも  $u$  あるいは  $v$  のどちらに摂動を加えるかに寄って異なること、である。特に特徴 3) は、パルスのテイルと呼ばれる、進行方向と反対側にできる構造が振動的であることと関係があると考えられる。

これらの結果はすでに参考論文<sup>(4)</sup>で得られており、今回本提案手法<sup>[1]</sup>で同じ関数が得られたことは、提案手法が妥当な結果を与えることを示したものとと言える。

次に並列効率について述べる。本提案手法では  $(G(T + t_0) - G(t_0))\mathbf{y}_0$  の計算に、1 周期分の時間発展が含まれるため系が大きいほど時間を要する。しかし、この部分で  $\mathbf{y}_0$  を変えた計算は初期値を変えるだけで良いので並列化が容易である。しかも計算中にデータの相互のやり取りは必要ないため並列化効率が非常に高いと予想される。その検証のため、12 コアをもつ計算機(Mac Pro(Late2013))を使って並列効率を検証した。並列化および最後の位相感受関数の計算部分はプログラミング言語 python を用いており、特に並列計算では python のライブラリを用い

て C 言語で書かれたプログラムを呼び出す形で実装している。このため並列化のためのプログラムの改変は最小限で済んだ。

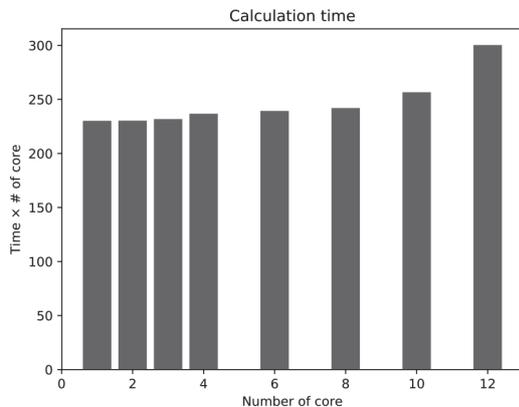


図2 計算機のコア数と延べ計算時間

並列計算の効率を図2に示す。横軸は並列計算に用いたコア数、縦軸は計算終了までにかかった時間にコア数を掛けたもの(述べ計算時間; 単位は秒)で、並列化効率が100%であればすべて同じ値になる。図2を見てわかるように、コア数が8程度まではほとんど同じ値となり、並列化効率が非常に良いことがわかる。実際には 1) 並列化により計算された  $(G(T + t_0) - G(t_0))$  からグラムシュミットを計算する過程は並列化していないため、コア数によらず時間がかかる、2) 計算に用いたマシンは本計算以外の作業も同時に行っているためすべてのリソースを本計算に割いているわけではない、3) 本モデルが検証用の1次元問題であり、 $(G(T + t_0) - G(t_0))$  の計算時間がそれほど長くない、という3つの理由により、計算コア数が搭載コア数である12に近づくにつれて述べ計算時間が長くなっていくと考えられる。1), 3) に関してはサイズの大きい問題になるにつれ影響が下がるため、本提案手法の並列化効率は良好であると結論づけることができる。

#### 4 計算例 II: カルマン渦列

本提案手法の検証および並列効率が確認できたので、次にカルマン渦列における位相感受関数の計算およびその意味について研究を行った<sup>[1][2]</sup>。カルマン渦列を記述する非圧縮 Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

で与えられる。ここで  $\mathbf{u}$  は速度、 $p$  は圧力  $Re$  はレイノルズ数である。円柱の直径は1、一様流は  $(1, 0)$  で与えられるものとする。また円柱は角速度  $V_\theta$  で回転しているものとする。この方程式を円周方向に  $N_\theta$ 、動径方向  $N_r$  に離散化する(いわゆるO型格子)。分割は円周方向、動径方向ともに不等間隔とし、円柱近傍、あるいは下流側ほど分割幅を細かくしている。計算領域は円で半径は20としている。図3に、計算領域を離散化した様子を示す。

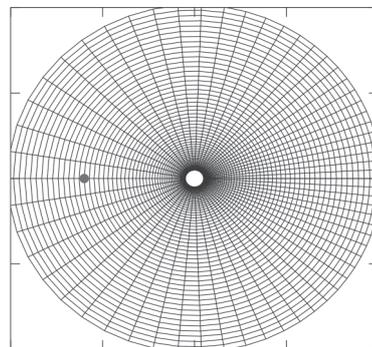


図3 計算領域の離散化

方程式の離散化は次のように行った。空間の離散化については、移流項は流束分離法に基づき3次精度、散逸項はクランク・ニコルソン法で2次精度である。時間方向はアダムス・バッシュフォース法により2次精度で離散化している。圧力を定めるポアソン方程式、および陰的解法であるアダムス・バッシュフォース法の解法には Bi-CGSTAB 法を用いた。

本提案手法を用いる際に必要となる LC ( $p(t)$ ) は、時間発展を十分に行えば収束するが、正確な周期の値が必要なため、本計算では時間周期解として計算した。そのために GMRES(k) 法とヤコビアンフリーなニュートン・ラフソン法を組み合わせたアルゴリズムを採用した。

本報告書で用いた計算では  $N_\theta = N_r = 60$ 、あるいは  $N_\theta = N_r = 40$  である。以下、典型例 ( $Re=200, V_\theta=0$ )<sup>[1]</sup> と、 $Re, V_\theta$  を変えた場合<sup>[2]</sup> に分けて解析結果を示す。

#### 4. 1 Re=200, $V_\theta=0$ の場合<sup>[1]</sup>

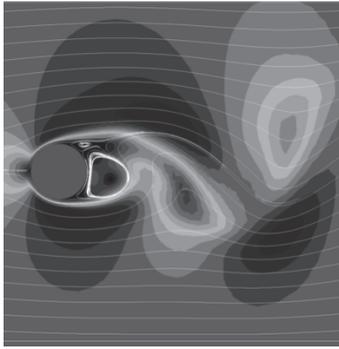


図4 LC として得られた, ある位相におけるカルマン渦 (Re=200)

図4に, Re=200,  $V_\theta=0$  の場合における LC の一例を示す. 灰色の円が円柱を表す. 場の色は局所的な流速の大きさ(速さ)を表し, 速さが大きい領域と小さい領域が共に濃い色で表現され, 中間的な大きさの領域は薄い色で表現されている. 円柱の真後ろの部分は円柱に隠れているため部分は流れが遮られるため速さは小さい. カルマン渦の発生に伴い渦の内部は低速領域となり, 渦が流されるにつれて低速領域が後流に運ばれている.

この系に提案アルゴリズムを用いて位相感受関数を計算した. その際の表示法として, 位相感受ベクトルを定義する. 位相感受ベクトルは,

$$\mathbf{Q} = \frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{u}}$$

により定義されるベクトルで, 意味は3章の Fitz-Hugh-南雲方程式の解析で定義した  $(q, Q)$  と同じである. 特に, 位置  $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$  において, 速度場が  $\mathbf{u}' \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$  だけ変化した場合の位相の変化は  $\mathbf{Q}$  と  $\mathbf{u}'$  の内積で与えられる.

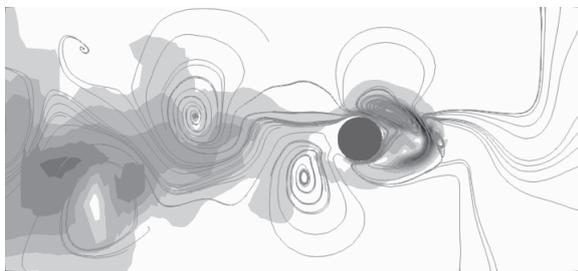


図5 位相感受ベクトル

位相感受ベクトルを表示したものが図5である. この図では位相感受ベクトルの積分曲線が表示されており, 位相感受ベクトルの大きさが色で表示されている(濃い方が大きい). 一見してわかるように, 円

柱下流に位相感受ベクトルのノルムが大きい(“強い”)領域が見られる. この領域は概ね流速の遅い領域と速い領域の境目に対応しており, 位相感受ベクトルは渦剥離に伴って位置や形状を動的に変化させる. また位相感受ベクトルの積分曲線が閉曲線が形成していることからわかるように, 位相を変化させるのに適した向きは時間・空間的にも大きく変化する. このことから, この領域では位相変化を制御するため摂動は時空間に渡り細かく変動させる必要があることがわかる.

一方, 円柱上流では  $\mathbf{Q}$  の積分曲線はいくつかの同心円が流れ方向に2列に並び, その間では積分曲線は蛇行している. 同心円の中心を結んだ直線はほぼ円柱の上端あるいは下端に対応している. これらの直線に沿って上流側に  $\mathbf{Q}$  の変動を見ると空間的に周期的になっていることがわかる. その(空間的)周期は概ねカルマン渦の(時間的)周期(と一様流速1の積)に一致する. すなわち, この直線近傍の領域で加えられた摂動は円柱から剥離する渦の剥離挙動を制御してタイミング(位相)をずらすことにより全体の位相を変えている事がわかる.

更に, この直線で囲まれた上流領域を見ると,  $\mathbf{Q}$  の  $x$  成分は概ね定符号(正)をもつことがわかる. この領域に加えられた摂動は渦の剥離を直接制御するわけではなく, 拡散することによって局所的な流速を増大させる効果により, 渦剥離の周波数を大きくすると考えることができる. 周波数が大きくなると剥離のタイミングが早くなるため位相が正の方向にずれる. こういった影響は円柱のすぐ上流よりもすこし距離が離れた場所のほうが大きい. これは摂動が拡散し, 一様流の増大とみなせるまでの距離が必要であるからと解釈することができる.

この様に, 計算により得られた位相感受ベクトルの挙動は渦剥離のタイミング, あるいは(無次元周波数が固定されたとした場合)剥離の周波数の変化により説明され, 流体運動の挙動として考えても納得が行くものである.

また本手法により計算された位相感受ベクトルが実際に渦剥離の制御に役立つかどうかを検証するため, 上流に摂動を与えた場合の位相のずれを測り, 位相感受ベクトルにより位相のずれを制御できることを確認した.

#### 4.2 Re=66.67, $V_\theta=0$ の場合<sup>[2]</sup>

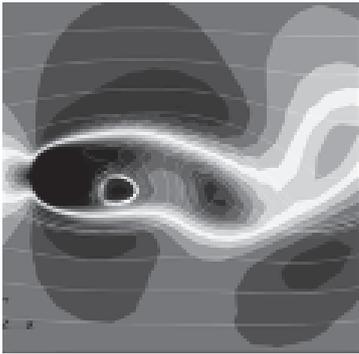


図6 Re=66.67,  $V_\theta=0$ における流速場

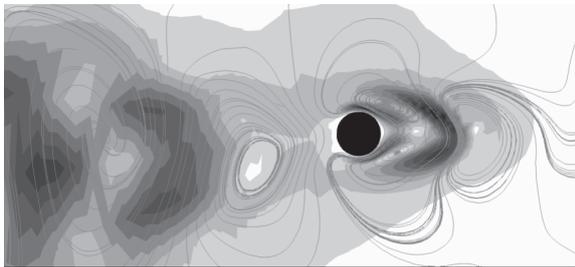


図7 Re=66.67,  $V_\theta=0$ における位相感受ベクトル

4.1 節で説明した特徴がパラメータを変化させた場合にどの様に変化するかを調べるため、本節では  $V_\theta=0$  で Re を下げた場合 (Re=66.67) の特徴について述べる。

一様流中におかれた円柱はおよそ Re=46 で定常状態から周期状態へ分岐を起こす。本パラメータは、より臨界状態に近いパラメータ値での位相感受関数の様子を調べるために設定したものである。

図6, 図7にはそれぞれ、Re=66.67 の場合の流速場(速さ)と位相感受ベクトルを示す。この値は4.1 節の解析に比べてより臨界値に近い。流速場を見るとわかるように、円柱後流の低速領域が Re=200 のときより長く延びており、流線の曲がり具合も小さいことから、剥離渦の強さも弱いことがわかる。これらは臨界点により近いために振動振幅が小さくなっていることによると考えられる。

位相感受関数を見ると、円柱後流にある位相感受ベクトルの強い帯領域も延びており、位相感受ベクトルの積分曲線の非対称性も少なくなっていることがわかる。同様に、上流で見られた積分曲線の同心円もより大きくなり、Re=200 の時に見られた、2列に分かれた特徴も失われてきている。特に、 $Q$  の x 成分は概ね定

符号(正)となる領域は見られない。

一方、 $Q$  の強さは全体的に Re=200 の場合より強いように見える。これは流速の振動が弱くなっているため、同じ強さの振動でもその影響が相対的に大きくなっているためであると考えられる。

#### 4.2 Re=200, $V_\theta=1.8$ の場合<sup>[2]</sup>

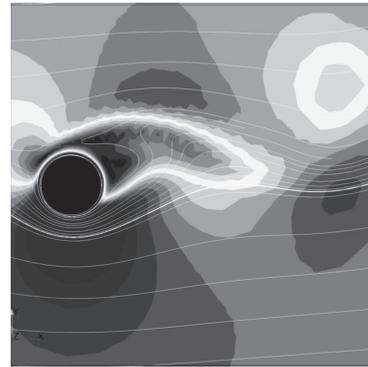


図8 Re=200,  $V_\theta=1.8$ における流速場

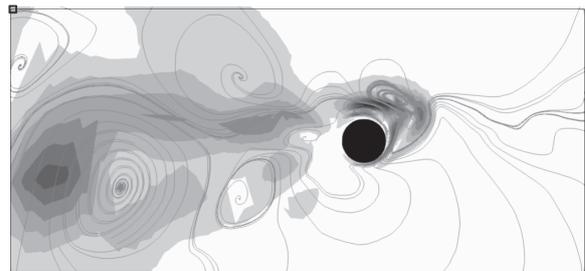


図9 Re=200,  $V_\theta=1.8$ における位相感受ベクトル

本節では Re=200 で  $V_\theta=1.8$  にした場合の位相感受関数の特徴を調べる。一様流中の円柱に対し、円柱を回転させると渦剥離の対称性が崩れ、回転数がある臨界値を超えると周期的な渦発生が失われることが知られている。Re=200 の場合、その臨界値はおよそ  $V_\theta=2.0$  である。本節で設定したパラメータ値は臨界値に近い値であり、Re とは異なるパラメータで、臨界値近くにした場合の挙動を調べることが目的である。

図8には流れ場の様子を示す。反時計方向に回転しているため、円柱の下では円柱回転と一様流速が強めあって大きくなり、円柱の上では弱めあって流速が下がる。このパラメータでは渦列の放出が観測されるが、臨界値に近いため振幅は小さい。このため、Re=66.67 の場合に見られた低速領域は回転により右上向きに方向を変えるものの、存在している。発生する渦も回転の影響を受けて右上

方向に放出されている。

図9に位相感受ベクトルが示されている。Re=200,  $V_0=0$  の時に見られた同心円構造は保持されているが、円柱の回転により実質的な上流の構造が代わり、値が大きい場所が上にずれている。

## 5 振動円柱の解析に向けて

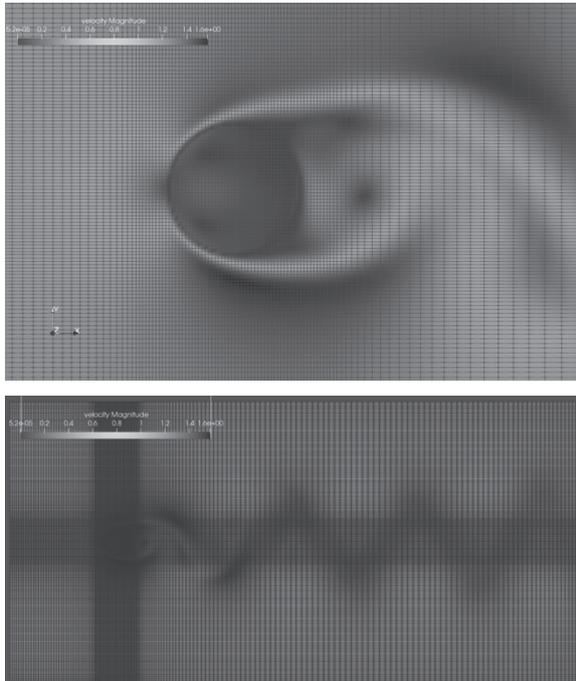


図10. 埋め込み境界法による円柱周りの計算例(速度の大きさを表示). 計算格子も同時に緑で表示している. 上は円柱近傍, 下は計算領域全域を表す.

これまでの解析は境界形状に合わせた計算格子を組み合わせることで少ない格子数で精度の良い計算を実現できた。しかし今後あるいは一般形状の物体を計算するにあたってはより柔軟な形状選択が可能であることが重要と思われる。そのために埋め込み境界法を採用し、計算プログラムの開発を行っている。埋め込み境界法は、Peskinにより提案された、物体による境界条件を体積力により実現させる方法で、直交格子のような単純化格子の元でも様々な物体形状を表現できる特徴がある。ここではこれまでに円柱周りの流れを解析するのに用いてきた有限体積法に体積力を導入することで埋め込み境界法による円柱周りの流れの計算を実現させた。

図8には、使用したプログラムによる円柱周りの計算例を示す。ここでは不等間隔の直交格子を用いており、その計算格子も同時に示されている。一見

してわかるように、明示的な境界を与えていないにも関わらず円柱周りの流れが表現されている様子がわかる。ただし、流れや円柱にかかる力を正確に計算するためには格子間隔をより細かく選ぶ必要がある。本プログラムでは不等間隔格子を用いることで計算効率を上げることが可能であるが、今の所流れおよび円柱にかかる力を十分な精度で計算するためには、格子数を円柱に適合させた格子の場合の数倍から10倍程度必要である。この差は、単純に時間発展を計算する程度では大きな問題にならないが、本提案手法を用いて位相感受関数を計算する場合の計算コストはかなり増大する。

この問題を解決する方策として、1) 計算資源の確保、2) 流体計算手法の改善、3) 計算パラメータのチューニング、4) 位相感受関数の計算手法の改善、の4つが考えられる。1) は最も単純かつ効果的であるがコストが掛かるため本課題では採用しなかった。また、本計算を発展させて3次元問題等より実際的な問題に適用することを考えた場合、さらなる計算コストがかかることから本質的な解決策とはならないと考えられる。2) では、振動円柱に特化したコードを組み合わせることで計算格子を減らすことが期待できるが汎用性に欠ける。3) は一定の期間試みたものの本研究課題の期間内では大きく改善することは難しいようである。

4) について、本課題により位相感受関数の空間特性が明らかとなり、重要な領域とそうでない領域に分けられることが明らかとなった。そこで、もし所望の領域に対してのみ位相感受関数が計算できれば、3次元の問題等、より大規模な問題に位相縮約法を適用する際にも大きな助けとなる。実際、有力と考えられるアプローチの着想があり、現在研究を進めている。このアプローチに関しては、予備的な計算では期待が持てる状態であるが、時間的な問題により理論的枠組の整備および検証がまだ十分でないことから助成期間内には論文発表に至らなかった。このため本報告書では詳細を記すことは控える。この手法が成功すれば、工学的な応用に向けて大きな前進となる。なお、埋め込み境界法によるプログラムでは、円柱の運動を取り込むことは容易で、実際プログラム自体はほぼ完成している。このため埋め込み境界法により振動円柱を解析することは、位相感受関数

の解析手法の改善ができれば問題なく実行できる。

## 6. まとめ

本研究課題では、リミットサイクルと呼ばれる、自然界で普遍的に見られる安定周期軌道近傍の現象を解析する位相縮約の手法を、流体系のような大域的かつ大自由度を持つ系に適用する手法の開発と、その円柱周りの流れへの適用を行った。時間発展のアルゴリズムのみを用いる手法を開発し、その手法が従来用いられてきた手法と同じ結果を与えることを確認し、一様流中に置かれた円柱から発生するカルマン渦列に適用した。その結果、カルマン渦列の位相を変えるために有効な領域は円柱近傍と上流にあり、それぞれの特性が明らかとなった。また、レイノルズ数や円柱の回転角速度を変えた場合の特性の変化もあきらかとした。いくつかのパラメータを変えて検証した結果、パラメータに依存して特性は変化するものの、普遍的な特性が見られた。この特性は、カルマン渦列という、これまでに様々な研究に用いられてきたある意味古典的な題材であっても、位相縮約という解析手法により新たな側面を持つことを示している。

また、本提案手法の更なる拡張のため、埋め込み境界法による計算コードの開発と位相感受関数を計算する新たな手法の研究を行った。本課題では今後広い応用範囲を見据えてこういった方向性を採用した。本課題は助成期間が終わったためにここで終了するが、この提案手法については継続して研究を続ける予定である。

最後に、本研究助成により流体系への位相縮約手法の適用という新しい研究テーマを遂行する財政的な支援を大変感謝しております。研究発表の旅費や参考資料等に役立てることができました。厚く御礼申し上げます。

## 発表論文

[1] M. Iima, “Jacobian-free algorithm to calculate the phase sensitivity function in the phase reduction theory and its applications to Karman’s vortex street,” *Phys. Rev. E*, vol. 99, (2019/5)062203.

[2] M. Iima, “Phase responses and flow characteristics of a family of Karman’s vortex streets,” *Proceedings of 2019 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications*, (2019/12)

## 参考文献

- (1) H. Nakao, *Contemp. Phys.* **57**, 188 (2015).
- (2) K. Taira and H. Nakao, *J. Fluid Mech.* **846**, R2 (2018).
- (3) V. Novichenko and K. Pyragas, *Nonlinear Dyn.* **67**, 517 (2012).
- (4) H. Nakao, T. Yanagita, and Y. Kawamura, *Phys. Rev. X* **4**, 021032 (2014).