

証明問題解決支援システムにおける問題の自動生成とその利用

Automatic problem generation in an Interactive Environment for Proof Question and Its Use

研究代表者 函館工業高等専門学校 准教授 倉山めぐみ

Megumi Kurayama

In recent years, the development of logical thinking ability has been actively carried out, and the proof question is attracting attention as one of the methods for developing logical thinking ability. It has been reported that about 40% of junior high school students do not write anything in the answer column for the figure proof question that junior high school students learn. Therefore, we are developing an interactive environment for proof question so that learners can write proof sentences. This system uses the "card selection method" to help learners understand the structure of the proof and write the proof by learning as if they were writing the proof. In this report, we implemented two methods for automatic problem generation in this system, especially for card set automation, and verified the learning effect using this system.

要旨

近年, 論理的思考力の育成が盛んに行われており, 論理的思考力を育む方法の一つとして証明問題が注目されている. 証明問題の中でも中学生が学習する図形の証明問題は, 約 4 割の中学生が解答欄に何も記述していないことが報告されている. そこで, 学習者が証明文を記述できるように, 証明問題解決支援システムの開発を行っている. 本システムでは, 「カード選択方式」を用いて, 学習者が証明文を記述しているように学習させることで, 証明の構造を理解し, 証明文が記述できるように支援している. 本報告では, 本システムにおける問題の自動生成, 特にカードセットの自動化について 2 つの方法を実装し, 本システムを利用した学習効果の検証を行った.

1. まえがき

近年, 論理的思考力の育成が盛んにおこなわれており, 他者へのプレゼンテーションやプログラミングを用いて, 論理的思考力を養おうとしている. また, 論理的思考力を養う方法の一つとして, 証明問題も挙げられる. 証明問題は, 与えられた問題に対してすでに分かっている事柄(仮定や条件)から分かりたい事柄(結論)を導くものであり, 仮定, 条件, 結論などがすでに与えられているものである. 分かっていることから分かりたいことを論理的に順序立てて考えていくことができることから, 他の方法に比べ, 論理的思考力を育成しやすいと考えている.

中学から学習が始まる数学では, 様々な問題において論述が必要となっているが, 清水¹⁾の報告によると, 平成 19 年から平成 22 年の 4 年間で行われた全国学力・学習状況調査の数学の記述問題において, 正答を導き出しているが, 数学的に表現することができていないという生徒がいることが報告されている. また, 中学の証明問題においても, 牧野²⁾によると, 中学 2 年生を対象とした証明問題の記述に関する調査で, 約 42%の生徒が何も記述することができず, 約 18%の生徒が記述はあるが正しく記述できていないことが報告されている. このことから, 証明問題において, 問題の理解と証明文の記述について支援する必要があると考えられる.

この証明問題の理解については, 様々な方法で支援が行われている. 宍戸ら³⁾は, 証明の構成過程において, 書かれている図形上でジェスチャーを利用することで学習者の理解を促進させている. システムを用いた支援⁴⁾では, 証明が持っている構造に着目し, 仮定と結論との関係をノードとリンクの階層構造を利用して理解の促進を図っているものが多数報告されている. しかしながら, 証明問題を解決するためには, 証明が持っている構造を数学的に表現する必要があると考える. そこで, 証明の構造を理解させ, 数学的表現が可能になる支援システムの開発を行っている. 学習者が証明の構造を理解し, 数学的表現が可能になる方法として, 「カード選択方式」が提案されており, カードに書かれている部分から証明の構造を考え, 証明文を記述することができる

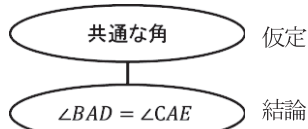


図1 基本構造

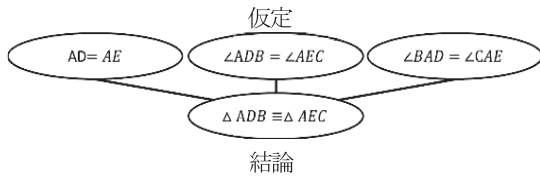
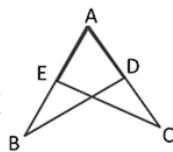


図2 三角形の合同の基本構造

右の図において、点D,Eをそれぞれ線分AC,AB上の点としたとき、 $AD=AE$, $\angle ADB = \angle AEC$ ならば $AB=AC$ であることを証明しなさい。



【証明】
 $\triangle ADB$ と $\triangle AEC$ において
 仮定より $AD = AE$
 仮定より $\angle ADB = \angle AEC$
 共通な角であるから $\angle BAD = \angle CAE$
 これらより
 1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$
 合同な図形では対応する辺の長さは等しいから
 $AB = AC$

図3 証明問題の例

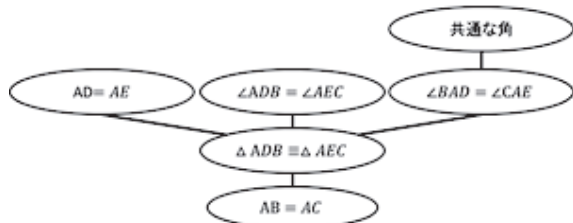


図4 図3の証明の構造

と考えた。本助成では、証明問題解決支援システムにおいて、現在、手作業で問題の登録（問題文、証明文、カードセット等）を行っているが、それらの自動生成、特に、カードセットの自動生成を行った。また、すでに開発されている証明問題解決支援システムを利用して、証明問題の学習効果についても評価実験を行った。

本報告では、2章で証明の構造、3章で証明問題の学習方法、4章で提案する証明問題解決支援システムを述べる。この4章で述べたシステムを利用した評価実験について5章で報告する。また、提案した

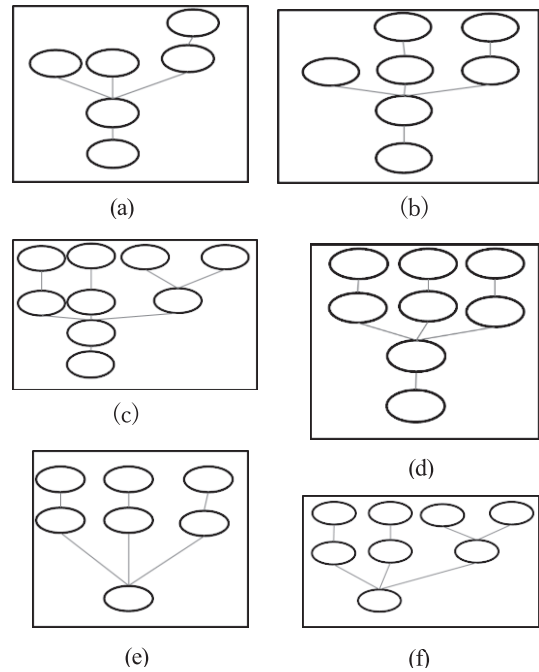


図5 合同証明の構造

システムで扱う問題数を増やすための方法として、カードセットの自動生成について6章で述べる。

2. 証明の構造

証明問題で記述する証明は、「仮定」と「結論」から成り立っており、結論を導くための条件とその条件を利用するために必要な要素を見つけ、それらを順序に従い記述していることで解決している。そこで、証明問題、特に三角形の合同条件を利用した証明について、図1のようにノードと線を利用して表面的な構造について分析を行った⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。三角形の合同は、3つの仮定から1つの結論が得られるため、図2のように示すこととした。例えば、図3の問題と証明を提案する方式で構造を表示させると図4のようになる。ただし、問題文中で仮定として与えられているものの「仮定」については、省略している。

この記述方法を用いて、三角形の合同条件を利用した証明問題について、教科書と問題集に記載されていた問題54問を表記したところ図5に示す5つの表記にまとまった。そのため、本研究において、三角形の合同条件を利用した証明は、図5の(a)の構造を持った証明問題を利用することとした。

また、三角形の合同条件以外を利用した証明問題についても扱えるように構造分析を行っており⁽⁹⁾、教科書に記載されている32問で利用されていた合同や性質は、直角三角形の合同、二等辺三角形、平

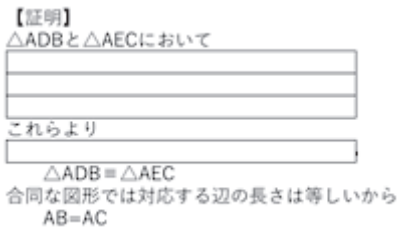


図6 穴埋めに近い出題形式



図7 記述式に近い出題形式

行四辺形、ひし形、正三角形についても利用された問題があった。これらの合同や性質について、問題では単体もしくは2つ同時に利用していることが分かった。

3. 証明問題の学習方法

一般的な証明問題の出題方式には、「記述式」「穴埋め式」がある。記述式は、学習者が証明部分をすべて自分で考え記述する方式である。仮定や結論など、証明を構成する要素を探し、文章の構成を考えるとところまで自分で行わなくてはならないため、初学者にとって困難ではあるが学習効果は非常に高い。一方で、穴埋め式は、証明問題の一部分を空欄にし、そこに学習者が式や文字を記述する方式である。初学者にも易しいが、慣れてくると空欄の前後を読むだけで解けてしまうこともあるため学習効果が上がらなくなるという欠点がある。また、数学的表現を記述させるためには、不十分な方法と言える。

記述式と穴埋め式は、「難易度」と「学習効果」の2つの点で大きく差がある。穴埋め式で証明問題が解けるようになった学習者が、記述式では解けないということが考えられる。その為、証明問題の学習を段階的に行えるように、この2つの学習方法の中間に位置するような学習方法を提案する⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

この中間に位置する学習方法として考えられるのが、「カード選択方式」である。横山ら⁽¹³⁾が提案しているカード選択方式は、あらかじめ用意されている単文が書かれたカード群からカードを取捨選択し、

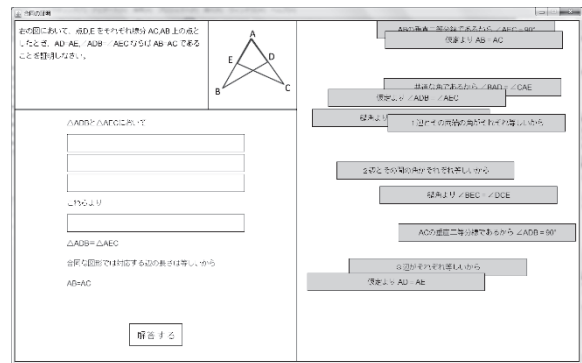


図8 システム画面

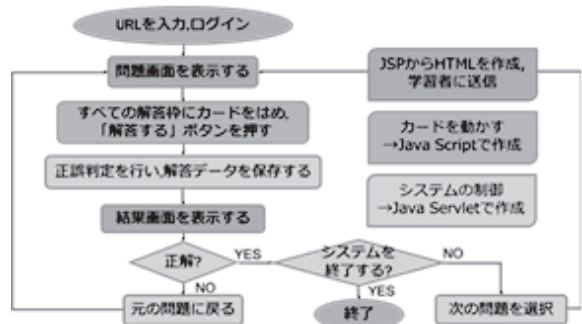


図9 webでの処理

並べていくことで解答し、その解答に対してシステムからのフィードバックが返ってくるものである。このシステムで利用されている単文カードは、「りんごが3個あります」といった1つの単文で状況が表現されているが、それだけでは問題にならないカードで構成されており、学習者が3つの単文カードを並べ、最後に質問文をつけることで問題が作成できる。

そこで、証明問題の学習では、単文カードを「仮定と結論が書かれた仮定カード」と「条件が書かれた条件カード」等とし、証明問題を解く際にカードを並べることで証明ができるようにする。図3の証明問題の例を基本に考えると、仮定や条件などの合同の証明に必要な部分のみを空欄にすると、図6のようになり、穴埋め式に近くなり、記述式ほど難解ではなくなり、初学者にも取り掛かりやすくなる。一方で、図7のように、結論や「これらより」などの証明を構成する部分も空欄にして考える部分を増やすと、必要な部分だけを探すだけでなく証明の構成を考えることを要求されるので、穴埋め式よりも記述式に近い出題形式になり、問題の難易度を偏差

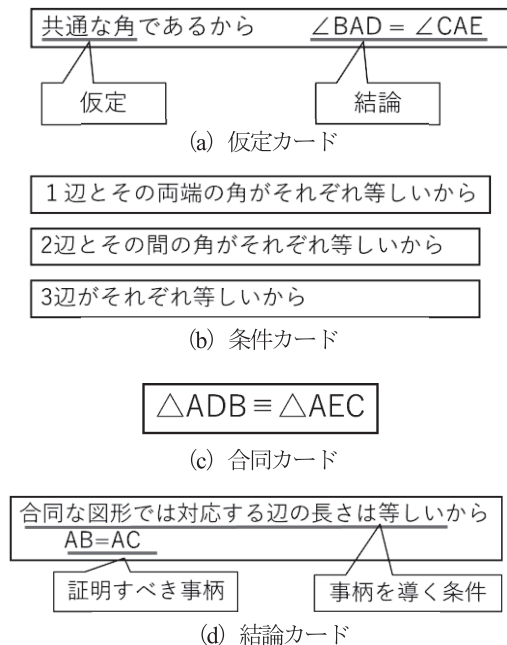


図 10 各種カードの例

させることができる。また、カード選択方式を用いることにより、自由記述では難しいとされるシステムで診断、フィードバックが可能となる。

4. 証明問題解決支援システム

4.1 システムの概要

カード選択方式を用いた証明問題解決支援システム⁹⁾(¹²⁾における実際の学習画面を図 8 に示す。システムが起動すると、学習者は表示された問題文を読み、ランダムに配置されたカード群からカードを取捨選択し、照明部分の空欄にドラッグアンドドロップで移動させて当てはめていく。空欄を全て埋めて解答ボタンを押すとシステムは正誤判定を行い、正解の場合は正解メッセージを、不正解の場合は不正解メッセージを表示する。その後、正解の場合は「次の問題へ」ボタンか「終了」ボタンを選択でき、「次の問題へ」ボタンを押すと次の問題を表示し、先に述べた順序で学習者は問題を解いていく。「終了」ボタンを押すとシステムは終了する。不正解の場合は「元の問題へ」ボタンより、カードを選択する画面へ戻る。

また、本システムは web 上で構成されており、システム全体の流れを図 9 に示す。まず学習者はサーバに向けて URL を送信する。サーバはそれに対して対象となる問題をレスポンスすることで学習者は問

題を解くことができる。学習者が問題を解くとサーバに解答が送信されて、サーバはそれを元に正誤判定を行い、解答データやその正誤をデータベースとして保存し学習者側に結果を返している。

4.2 単文カードセット

本システムで用意しているカードには、1 つの事実が書かれており、図 3 に示した問題の場合は、各行を 1 つのカードとして用意している。証明に必要なカード（以降、正解カードと呼ぶ）は自動生成されており、証明の構造から仮定、証明の合同、結論のそれぞれの方に当てはめた配列に格納し、この配列を基に正解カードを生成している¹⁴⁾。また、ダミーカードについては、システム作成者があらかじめ用意したものを利用している¹⁴⁾。現在のシステムで利用しているカードは、図 10 に示すように 4 種類のカードを利用しており、それぞれの種類のカードに対してダミーカードを用意している。

4.3 正誤判定

空欄をすべて埋め、解答ボタンをクリックするとシステムが正誤判定を行う。システムはあらかじめどのカードをどこに入れると正解になるのかという情報を保持しており、その情報を利用して、正誤判定を行っている。そのため、フィードバックの内容として正誤と誤っている空欄の場所を返している。画面上では新しいウィンドウに、正解の場合は「正解です」というメッセージを、不正解の場合は「不正解です。○枚目のカードが間違っています」というメッセージを表示する。不正解の場合はウィンドウを閉じて問題も終了せず、元のカードを選択する画面に戻る。

図 4 の証明文の構造から分かるように、三角形の合同条件などの条件を利用する際、2~3 つの仮定（条件によって異なる）については並列の関係にある。そのため、この仮定部分については、順を問わない判定となっている。

5. 評価実験

4 章で述べた証明問題解決支援システムを用いて、学習者が問題なく利用し、実際に証明問題の記述ができるようになることができるようになったについ

て、評価実験を2回行った。その評価実験についてそれぞれ報告する。

5.1 評価実験①

本実験では、高専生4名に対して、本システムを利用して学習効果が得られるかについて検証を行った。タブレットを利用し、web上のシステムの利用では、「合同に関する問題」を8分間、「性質に関する問題」を8分間利用してもらった^[9]。システム利用の前後では、プレ・ポストテストをそれぞれ10分間ずつ行った。このプレ・ポストテストは、同じ問題を用い、穴埋め式の問題が2問、記述式の問題が2問となっている。

プレ・ポストテストの結果、プレテストの平均が7.0点、ポストテストの平均が10.0点であったが、被験者の数が4名と少ないため検定を行っていない。しかし、テストの点数としては微増しているが、差があると言えるまではないと考えている。この原因として、本評価実験で利用したシステムの空欄部分が、三角形の合同に必要な条件部分と合同条件のみとなっていたため、全体を考える必要が少なかったのではないかと考えられる。そのため、今後の評価実験では、システム内の空欄部分について考える必要があることが分かった。

5.2 評価実験②

本実験では、高専2年生5名に対して、タブレットを利用しweb上で25分間システムを行った^[9]。利用システムでは、証明部分を全て空欄とした問題とし、三角形の合同や図形の性質を利用して証明する問題とした。また、学習効果が得られたのかを判断する材料として、システム利用前後に証明問題4問のプレ・ポストテストを各15分行った。プレ・ポストテストの内容は、穴埋め問題2問(各15点)、記述式問題2問(各35点)の計4問(100点満点)を出題し、プレテストにはシステムで扱っている問題と扱っていない問題を混合させて出題し、ポストテストにはシステムで扱っていない問題のみを出題した。実験終了後にシステムに対するアンケートを行った。

実験の結果、本システム利用時の平均正解数が5.2問、不正解数が1.6問であった。この結果から、1問

につき平均5分で解いていることが予測される。本評価実験を行うにあたり、システムが用意していた問題は10問(三角形の合同条件を用いるものと平行四辺形の性質を用いるもの)用意していたが、5名とも最後まで解くことはできなかった。この原因としてシステムの利用時間が少なく、十分にシステムを利用してもらうことができなかったこと、システムが提示するカード群にかかれた単文を認識するのに時間がかかったことが考えられる。しかし、一人一人のシステム利用状況を見ると、一度間違えた後、違う問題でも同じような間違いをしていないことが分かり、システムを利用することで学習が進んでいった可能性が考えられる。

アンケートについても証明問題を解けるようになったと自覚している人の割合が高く、楽しくシステムを利用できていたという結果が得られた。これらの結果から、システムを利用することで証明問題の構造を理解し、実際に問題を解くことができていると考えられる。

学習効果の評価について、プレ・ポストテストを実施した結果、プレテストの平均点が32.5点、ポストテスト平均点が60点であった。両者の平均の差をt検定によって比較したところ、有意水準5%でテストの点数に差があると認められた。また、テスト結果を穴埋め問題と記述式問題に分けてそれぞれ同じ条件で検定を行った結果、どちらも点数に差が認められた。このことから、証明の構造を理解し、証明文を書くことにも効果があるのではないかと考えられる。

以上より、学習者は本システムを活用して学習を進めることで、証明問題の証明文の構造を考えさせることができている可能性を見いだすことができた。

5.3 2つの評価実験の比較

5.1節と5.2節で述べた2つの評価実験について、比較検討を行う。2つの評価実験は、システムの利用時間やシステムで扱っている空欄部分に違いがあり、直接的に比較することは難しい。しかしながら、プレ・ポストテストの実施内容については、類似している部分もあることから、これらのことを踏まえて、比較を行う。

評価実験①のプレ・ポストテストの実施結果とし

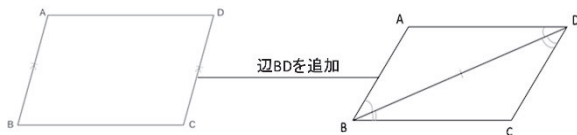


図 11 図形の辺を 1 本追加・削除の例



図 12 図形の点を 1 つ追加・削除の例

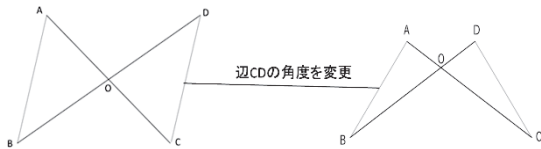


図 13 図形の角度の変更

て、各テストの平均点に有意な差はみられなかったが、評価実験②のプレ・ポストテストの平均点には有意な差が見られたことから、合同や性質に必要な仮定とそれぞれの条件を単文カードで組み合わせるだけでは、学習効果が得にくく、評価実験②のように、証明文全体を組み合わせる方法のほうが、学習効果を得やすいのではないかと考えることができる。しかし、どちらの実験においても被験者数が少ないことや、システムの利用時間が短いこと等、多くの問題点があることから、今後の評価実験においては、これらの問題点を踏まえて行う予定である。

6. カードセットの自動生成

カードセットの自動生成を行うために、各証明問題で利用されている図形からそれぞれの図形とそれらの関係を示した「証明問題ネットワーク」の構築を利用したダミーカードの生成方法³⁾と問題自体の特徴を利用したダミーカードの生成方法⁴⁾について述べる。システムに利用しているカードセットにおいて、正解となるカードの自動生成は 4.2 節で述べた通り、自動化されていることから、本報告では、ダミーカードの生成方法について述べる。

6.1 証明問題ネットワークを利用した手法

本研究で作成する証明問題ネットワークは、中学数学の証明問題で扱う問題を対象とし、その問題で利用されている図形に着目し、図形と図形との間に存在する関係を表現する。この証明問題ネットワークにおいて、ノードには、証明問題で扱っている図

形を、リンクには、図形の違いを以下の条件で表現することとした。

- ① 図形の辺を 1 本追加・削除
- ② 図形の点を 1 つ追加・削除
- ③ 図形の角度の変更

この①～③のリンクに関して説明する。①の場合、図 11 のように、平行四辺形 ABCD に B と D を結ぶ線を追加することでリンクを張ることができ、右の図形へ遷移する。②の場合、図 12 のように、辺 AB 上の点 D、辺 AC 上の点 E を削除していくと、右に遷移する。③の場合、図 13 のように、1 つの辺 (辺 CD) の角度を変更したことで図形に変化が起り、右に遷移する。一方で、条件に当てはまらない例外的なリンクの貼り方も存在しており、これは、上記の条件でノードとリンクを張っていくと、2 つ以上のノードに問題が存在しない状態で生成される。そうすると、ネットワーク自体が複雑化してしまうことから、今回は例外として扱うこととした。

作成した証明問題ネットワークは、現在 71 個のノードが組み込まれており、そのうち、証明問題で扱われている図形が 35 個、問題ないとして扱われている図形が 36 個となった。また、例外として「距離 4 として扱う」リンクは、3 個存在する。このように作成された証明問題ネットワークから、近傍の証明問題の正解カードをダミーカードとして生成することができると考えており、今後実装していく予定である。

6.2 証明問題の特徴を利用した手法

三角形の合同条件を利用した証明問題の証明文から読み取ることができる特徴は、「合同条件の特徴」と「仮定部分の特徴」があげられる。これらの特徴を組み合わせ、ダミーカードの生成を行う。

合同条件の特徴では、合同条件の 3 つ、「三辺が等しい」「二辺とその間の角がそれぞれ等しい」「一辺とその両端の角がそれぞれ等しい」のうち、証明文中で用いられているものを特徴として選択する。

仮定部分の特徴では、まず証明文中の仮定部分を「共通な〇〇なので」「図形の性質」「その他」の 3 種類に分けて考える。仮定部分に正三角形、二等辺三角形、正方形、平行四辺形のうちのいずれかの単語が含まれていた場合は、仮定部分の特徴としてそれ

ぞれの「図形」を，上記の単語が含まれていた場合は「共通」を，それ以外の場合は「その他」を仮定部分の特徴として選択する。

次に，それぞれの問題を分類するために，問題用の3次元配列を利用して，1次元に合同条件の特徴を，2次元に仮定部分の特徴を，3次元に問題番号を格納する．これを用いて，ダミーカードを生成する際に，問題画面に表示する証明文を生成する際に，各情報を読み取り，取り出した問題番号に対応する問題の正解カードをダミーカードとして，生成する．

7. まとめ

本研究では，中学数学で扱っている図形の証明問題についての，解決支援システムの提案と実装，そのシステムを利用した評価実験について行った．特に，解決支援システムでは，カードセットの自動化を行うことで，これから問題を追加していく上で，システム上，初期のシステムに比べて比較的簡単にできるようになると考えている．しかしながら，令和2年度については，新型コロナウイルスの関係で，学校の休講等により，多人数での評価実験の実施は行うことができなかった．

今後の予定は，システムへの問題の追加と多人数による評価実験や，実際の中学の授業等での活用について行っていく予定である．

発表論文

- [1] 長野大智，倉山めぐみ，証明問題解決支援システムにおけるダミーカードの自動生成，教育システム情報学会2020年度学生発表会，pp. 11-12，2021年3月
- [2] 倉山めぐみ，単文カードを利用した証明問題解決支援システムの開発とその利用，電子情報通信学会技術研究報告，Vol. 119，No. 468，ET2019-93，pp. 99-102，2020年3月
- [3] 島本啓太，倉山めぐみ，証明問題解決支援システムにおける証明ネットワークの作成，教育システム情報学会2019年度学生研究発表会，pp. 17-18，2020年3月
- [4] 倉山めぐみ，渋谷勇氣，証明問題解決支援システムにおけるダミーカードの生成手法の検討，人工知能学会先進的学習科学と工学研究会，No. 85，pp. 55-58，2019年3月
- [5] 吉原直輝，松下将也，倉山めぐみ，中学数学の図形における証明問題解決支援システムの提案，教育システム情報学会2018年度学生発表会，pp. 5-6，2019年3月

参考文献

- (1) 清水宏幸，全国学主力・学習状況調査の結果にみる中学校数学科の指導上の課題—記述式問題に焦点を当てて—，日本数学教育学会誌，第94巻，第9号，pp. 38-41，2012年
- (2) 牧野智彦，中学2年生による証明の記述に関する研究：記述された証明の分析を通して，日本科学教育学会研究会研究報告，19(6)，pp. 29-34，2005年
- (3) 穴戸建太，岡崎正和，図形の証明の構成過程におけるジェスチャーの役割に関する研究，全国数学教育学会誌，数学教育学研究，第23巻，第2号，pp. 141-149，2017年
- (4) 舟生日出男，平嶋宗，幾何証明課題における推論の誤りのインタラクティブな可視化，日本科学教育学会年会論文集30，pp. 509-512，2006年
- (5) 野村晃希，御岡真史，証明指導における論理構造の理解を目的としたKneading Board活用可能性の検討，日本科学教育学会研究会研究報告，Vol. 30，No. 3，pp. 139-144，2015年
- (6) 中学数学における，証明学習支援システム刷新—“定理ブロック”の活用による，証明を構想する活動の充実—，日本科学教育学会第40回年会論文集，pp. 329-330，2016年
- (7) 飯島康之，思考を変えするための道具としてのテクノロジーを実感するための授業研究，日本科学教育学会第42回年会論文集，pp. 79-80，2018年
- (8) 濱田さとみ，鷹岡亮，横山誠，中学校数学科合同証明を対象とした証明構造理解支援Webアプリの開発と有用性の検討，日本教育工学会論文誌，Vol. 42，pp. 169-172，2018年
- (9) 倉山めぐみ，カード選択を利用した証明問題解決支援システムの開発，2015年度人工知能学会全国大会，IE4-08-11a-3，2015年
- (10) 嶋田秀斗，倉山めぐみ，証明問題解決支援システムのためのデータベース構築，教育システム情報学会2014年度学生研究発表会予稿集，pp. 7-8，2015年
- (11) 倉山めぐみ，浜本風花，中村香織，段階的学びを促す証明問題解決支援システムの開発，教育システム情報学会第41回全国大会論文集，pp. 353-354，2016年
- (12) Megumi Kurayama，Developing a Geometric Proof Problem-Solving Support System Utilizing Card Selection，Proc. of ICCE2017，pp. 110-112，2017年
- (13) 横山琢朗，平嶋宗，岡本真彦，竹内章，単文統合としての作問を対象とした学習支援システムの設計・開発，教育システム情報学会誌，Vol. 23，No. 4，pp. 166-175，2006年
- (14) 金沢萌実，倉山めぐみ，証明問題解決支援システムにおけるカード群の自動生成—正解カードと証明文の生成—，教育システム情報学会2017年度学生発表会，pp. 13-14，2018年